

Aplicação do Formalismo Quântico de Hamilton-Jacobi para uma Partícula com Carga Elétrica em um Campo Magnético Pulsado Oscilante.

Rafael Augusto Couceiro Corrêa, Alvaro de Souza Dutra. – Física – Bacharelado em Física - Departamento de Física e Química – UNESP – Campus de Guaratinguetá.

No estudo da mecânica quântica ao longo dos anos, têm sido desenvolvidos diversos formalismos a fim de entender a estrutura da matéria. Destes, o formalismo mais popular, ao menos em termos de cursos de graduação, ficou sendo o de Schrödinger, o que se justifica em um arcabouço secular do estudo de equações diferenciais lineares.

Todavia alguns anos atrás, foram apresentados os postulados básicos de uma terceira versão para o estudo da mecânica quântica, qual seja, o de uma versão quântica do chamado formalismo de Hamilton – Jacobi [1].

Trata-se de um formalismo interessante, na medida que, ele permite uma introdução relativamente simples aos sistemas de equações diferenciais não – lineares, como exemplo podemos citar as equações diferenciais que governam os sistemas de instantons e solitons [2], além de tudo, este formalismo possui como grande vantagem, o fato do limite clássico ser facilmente verificado ao fazermos a constante de Planck tender a zero.

Assim, neste trabalho, ilustramos uma aplicação deste formalismo para um problema associado à dinâmica quântica de uma partícula com carga elétrica e , sob a ação de um campo magnético oscilante dado por

$$\vec{B}(t) = B_1 \cos(\omega t) \vec{i} + B_2 \sin(\omega t) \vec{j} + B_0 \vec{k}, \quad (1)$$

Utilizando o campo magnético oscilante acima, mostramos que a equação quântica de Hamilton-Jacobi assume a forma,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{m\gamma^2 B_0^2}{8c^2} (x^2 + y^2) + \frac{m\gamma^2 B_1^2}{8c^2} [z^2 \\ & + (x \sin(\omega t) - y \cos(\omega t))^2] - \frac{m\gamma^2 B_0^2 B_1^2}{4c^2} z [y \sin(\omega t) - x \cos(\omega t)] \\ & + \frac{\gamma B_1}{2c} \cos(\omega t) L_x - \frac{\gamma B_1}{2c} \sin(\omega t) L_y + \frac{\gamma B_0}{2c} L_z + e\phi(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial t} \\ & = \frac{i\hbar}{2m} \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

É interessante ressaltar que a equação acima recai no caso clássico ao fazermos $\hbar=0$, que é uma característica importante deste formalismo.

Resolvendo a equação (2), obtemos a função principal de Hamilton quântica e mostramos que sua forma é dada por

$$\begin{aligned} S(x, y, z; t) = & \frac{-m\omega \tan(\omega t + c_1)}{2} (x^2 + y^2) + \left(\frac{\sigma}{m} - c_2 \tan(\omega t + c_1) \right) x \\ & + \left(\frac{\sigma}{m} \tan(\omega t + c_1) + c_2 \right) y + c_3 z + i\hbar \ln[\cos(\omega t + c_1)] - \frac{1}{2m} \tan(\omega t + c_1) \left[\frac{c_2^2}{\omega} + \frac{1}{\omega} \left(\frac{\sigma}{\omega} \right)^2 \right] \\ & - \frac{c_3^2 t}{2m} + c_4 + c_5 + c_6. \end{aligned} \quad (3)$$

Portanto, o propagador quântico, que descreve a evolução temporal para o sistema em estudo adquire a forma

$$K = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar\sin(\omega t)} \right) \left(\frac{m}{2\pi\hbar t} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left[\omega \cot(\omega t) ((x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2) + 2\omega(x\tilde{y} - \tilde{x}y) + \frac{(z - \tilde{z})^2}{t} \right] \right\} \quad (4)$$

Podemos observar que neste caso, o problema reduziu-se a um oscilador bidimensional no plano $x y$ e a uma partícula livre na direção z . Fica mostrado também que não foi necessário fazer uma rotação no sistema de coordenadas para resolver o problema.

Por outro lado, mostramos também uma análise da referência [3], que trata do mesmo problema, porém tais autores utilizaram algumas técnicas não ortodoxas para solução de campos dependentes do tempo, assim tornou-se necessário analisarmos a validade de tais soluções através do formalismo de Schrödinger. Neste desenvolvimento vamos mostrar que a hipótese levantada por aqueles autores, qual seja, a de que o campo efetivo deste sistema é dado pela expressão,

$$\vec{B}_{ef} = \left(B_0 + \frac{\omega}{\gamma} \right) \vec{k} + B_1 \vec{i}. \quad (5)$$

não é válida para o sistema estudado por eles, embora seja correta no caso de uma equação diferencial de primeira ordem, para a qual foi demonstrada originalmente, o que fazemos também aqui neste trabalho. Em outras palavras, a hipótese é verdadeira desde que seja utilizada a equação de Schrödinger abaixo

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(t) \psi, \quad (6)$$

com μ representado o campo magnético, que pode ser escrito de acordo com a referência [4] como

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{L}, \quad (7)$$

em que \vec{L} é o momento angular.

Além de tudo, durante este último desenvolvimento mostramos uma aplicação do método de transformação canônica de ponto desenvolvido em [5] e [6], que é de grande utilidade quando trabalhamos com problemas envolvendo frequência e massa dependentes do tempo. Trabalhando com este método ficará mostrado que, em última análise, em alguns sistemas o problema pode ser reduzido ao de um oscilador harmônico clássico

$$\ddot{\chi} + \xi^2 \chi = 0, \quad (8)$$

com $\xi = \text{constante}$.

Em suma, neste trabalho mostramos uma aplicação do formalismo quântico de Hamilton-Jacobi, tal aplicação torna-se interessante, pois, demonstra que de fato o formalismo quântico de Hamilton-Jacobi é uma versão paralela para o estudo da mecânica quântica e possuindo como grande vantagem o fato de recair facilmente no limite clássico ao fazermos $\hbar=0$.

Contudo, tal formalismo ainda permite o estudo de equações diferenciais não-lineares semelhantes às equações encontradas quando estudamos sistemas de instantons e solitons, tornando-se muito interessante aplicar o conhecimento adquirido neste trabalho para estudar tais sistemas.

Referências

- [1] A. S. de Castro e A. de Souza Dutra, Foundations of Physics **21** (1991) 649.
- [2] Rajaraman, R., Solitons and Instantons, North Holland, Amsterdam, (1982).
- [3] I. S. Oliveira, A. P. Guimarães e X. A. da Silva, Physical Review E **55** (1997) 2063.
- [4] C. P. Slichter, Principles of Magnetic Resonance, Springer Verlag, Berlin, (1990).
- [5] C. Farina e A. de Souza Dutra, Physical Letters A. **123** (1987) 297.
- [6] A. de Souza Dutra, M. B. Hott e V. G. C. S. dos Santos, Europhysics Letters **71** (2005) 166.

Bolsa: CNPq/ PIBIC